MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

CÁLCULO DA VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS DE SATÉLITES LUNARES DEVIDO À DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE MASSA DA LUA

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)

Maria Lívia Galhego T. X. da Costa (ICT/UNIFESP, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: livia.thibes@gmail.com

Dr. Antônio Fernando Bertachini de A. Prado (DMC/INPE, Orientador)
E-mail: prado@dem.inpe.br

Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes (ICT/UNIFESP, Co-orientador)
E-mail: rodolpho.vilhena@gmail.com

Julho de 2013

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo."
Pitágoras
"A física é a poesia da natureza. A matemática, o idioma."
Antônio Gomes Lacerda

AGRADECIMENTOS

A Deus pela saúde e força que foram concedidas para a realização deste trabalho.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) pela oportunidade de estudo, o qual contribui, de algum modo, para a sociedade e a ciência.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro recebido junto ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC/INPE).

Ao orientador Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e co-orientador Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes pela dedicação, apoio, interesse e constante ajuda no processo de consolidação deste projeto.

Ao Dr. Jean Paulo dos Santos Carvalho e aos alunos Josué Cardoso dos Santos, Liana Dias Gonçalves e Gabriel Borderes Motta por todo conhecimento compartilhado.

Aos meus pais que sempre edificaram e direcionaram minha vida com muito carinho.

Ao meu companheiro e namorado que esteve comigo em todos os momentos para a realização e concretização deste trabalho.

Aos familiares e amigos pelo incentivo e pela contribuição, direta ou indireta, para a conclusão de mais esta etapa.

RESUMO

Quando se estuda o movimento de um satélite artificial ao redor da Lua levando em conta a distribuição não uniforme de massa lunar e os polinômios de Legendre para descrever o potencial, observa-se que a ordem de grandeza de alguns coeficientes associados à ordem e grau dos polinômios não são hierarquicamente proporcionais à ordem e grau dos polinômios. Diferentemente do caso da Terra, a ordem do coeficiente associado ao C_{22} é apenas um décimo menor que o coeficiente associado ao J_2; também, podemos citar a ordem de grandeza do coeficiente associado ao J_9 é maior que a ordem de grandeza do coeficiente associado ao J_3. Isto faz com que o comportamento do movimento orbital de satélites lunares, sob alguns aspectos, seja diferente do comportamento do movimento orbital de satélites artificiais da Terra.

Neste trabalho, utilizando as equações planetárias de Lagrange, são comparadas as variações de elementos orbitais de satélites lunares devido à distribuição não uniforme de massa da Lua com as variações de elementos orbitais de satélites artificiais terrestres devido à distribuição não uniforme de massa da Terra. Soluções analíticas aproximadas são comparadas com a integração numérica das equações para algumas simulações.

VARIATIONS OF THE ORBITAL ELEMENTS OF LUNAR SATELLITES DUE TO NON-UNIFORM DISTRIBUTION OF MASS OF THE MOON

ABSTRACT

When studying the motion of an artificial satellite around the Moon, taking into account the non-uniform distribution of mass for the Moon and Legendre polynomials to describe the potential, is observed that the order of magnitude of some coefficients associated with the order and degree of the Legendre polynomials are not hierarchically proportional to the order and degree of the polynomials. Just to mention, unlike from the case for the Earth, the order of the coefficient C_{22} is only a tenth lower than the coefficient associated to J_2; also as another example, the order of magnitude of the coefficient associated to J_9 is great than the order of magnitude of coefficient associated to J_3. Underneath some aspects this fact becomes the behavior of orbital motion of lunar satellites different from the behavior of orbital motion of artificial satellites orbiting around the Earth.

In this work, the time variations of some orbital elements of lunar satellites perturbed by the non-uniform distribution of mass of the Moon are compared with variations of the orbital elements of artificial satellites orbiting around the Earth perturbed by the non-uniform distribution of mass the Earth. Lagrange planetary equations are used. Simulations are done comparing approximate analytical solutions with numerical integration of the equations of motion.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

G - constante gravitacional universal

μ - constante gravitacional

P_1 - corpo 1

P_2 - corpo 2

m_1 - massa de P_1

m_2 - massa de P_2

r - módulo da distância entre dois corpos

$\ddot{\vec{r}}_1$ - aceleração do corpo P_1

$\ddot{\vec{r}}_2$ - aceleração do corpo P_2

m_{sat} - massa do satélite artificial

a - semi-eixo maior de uma órbita elíptica

e - excentricidade de uma órbita elíptica

i - inclinação de uma órbita elíptica

ω - argumento do pericentro de uma órbita elíptica

Ω - longitude do nodo ascendente de uma órbita elíptica

τ - instante de passagem do pericentro de uma órbita elíptica

M - anomalia média

f - anomalia verdadeira

a_e - raio equatorial do corpo central

ω_0 - ω inicial de uma órbita elíptica

Ω_0 - Ω inicial

M_0 - M inicial

n - movimento médio de um satélite artificial ou grau dos polinômios e polinômios associados de Legendre

λ - longitude de um satélite artificial

h - altitude de um satélite artificial

ϕ - latitude do satélite

i_s - inclinação de uma órbita heliossíncrona

U - potencial de um corpo

P_n - polinômios de Legendre

$P_{n,m}$ - polinômios associados de Legendre

R - perturbação

U - potencial gravitacional

J_2 - achatamento do corpo central

C_{22} - harmônico setorial do corpo central

t - tempo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nos primeiros meses deste projeto de pesquisa, realizou-se um levantamento bibliográfico dos principais tópicos de mecânica celeste aplicados aos problemas, os quais abordaram a influência da distribuição não uniforme de massa de corpos celestes em órbitas de satélites artificiais. O presente trabalho foi subdividido, por uma questão didática de metodologia, em duas partes, a princípio, foram apresentados conceitos teóricos e um estudo analítico do problema foi feito e, *a posteriori*, foram desenvolvidos métodos numéricos para a obtenção da solução.

A parte analítica do estudo em questão iniciou-se com tópicos básicos de mecânica celeste entre eles: as leis de Kepler (Johannes Kepler, 1571-1630), as três leis de Newton juntamente com a Lei da Gravitação Universal, ambas propostas por Isaac Newton (1643-1727), no ano de 1687, em sua obra prima "*Philosophiae naturalis principia mathematica*", e a solução para o "*Problema de Dois Corpos*", o qual consiste determinar, em um sistema inercial, a trajetória de dois pontos materiais sujeitos à ação exclusiva da força gravitacional, desconsiderando qualquer tipo de perturbação (Kuga et al., 2008). A solução deste problema pode ser reduzida à determinação da posição e velocidade de um dos corpos em relação ao outro. Estudou-se o caso elíptico e a sua solução em termos dos elementos orbitais keplerianos: semi-eixo maior (a), excentricidade (e), inclinação (i), argumento do pericentro (ω), longitude do nodo ascendente (Ω) e o instante de passagem no pericentro (τ) (ou da anomalia média $M = n(t- \tau)$, em que n é o movimento médio), que possibilitam encontrar a posição e a velocidade de um corpo celeste, natural ou artificial, em uma órbita.

Posteriormente, introduziu-se conceitos mais avançados envolvendo o estudo de forças perturbativas e como estas forças interferem no comportamento de satélites artificiais. E, finalmente, as equações planetárias de Lagrange (1736-1813) foram apresentadas como ferramenta fundamental na determinação da posição, correção e variação dos elementos orbitais keplerianos de um veículo espacial em uma órbita quando os mesmos sofrem ação de forças perturbativas, sejam elas derivadas de um potencial (caso, por exemplo, da não distribuição uniforme de massa do corpo central, ou a atração por um terceiro corpo), ou por forças não monogênicas (como é o caso, por exemplo, da pressão de radiação solar quando se considera o efeito sombra, e do arrasto atmosférico). No caso de forças que não derivam de um potencial, as equações de Legendre são dadas na forma de Gauss.

Particularmente para este trabalho, considerou-se a não distribuição uniforme de massa do corpo central ao potencial lunar e geopotencial. Nestes dois casos, o potencial foi desenvolvido em termos dos polinômios de Legendre e polinômios associados de Legendre.

Quanto à análise numérica do problema, os resultados foram obtidos por meio dos *softwares* MAPLE e MATLAB, levando em consideração o potencial lunar e geopotencial nos seguintes sistemas: Lua-satélite artificial lunar e Terra-satélite artificial terrestre, respectivamente.

1.1 OBJETIVOS

Este trabalho possui um caráter comparativo, pois a variação dos elementos orbitais de satélites artificiais lunares obtida através de simulações numéricas, em sua grande maioria, será comparada com a variação ocorrida no movimento de satélites artificiais terrestres, em condições semelhantes. Porém, o objetivo fundamental deste projeto é calcular a variação dos elementos orbitais devido à distribuição não uniforme de massa da Lua. Os resultados e exemplos exibidos para a Terra são tão somente contemplados para provar, de fato, que quando se estuda o movimento de um satélite artificial ao redor da Lua, levando em conta a distribuição não uniforme de massa lunar e os polinômios de Legendre para descrever o potencial, nota-se que a ordem de grandeza de alguns coeficientes associados à ordem e grau dos polinômios não são hierarquicamente proporcionais à ordem e grau dos polinômios, diferentemente do caso da Terra.

1.2 MOTIVAÇÃO

As primeiras atividades espaciais ocorreram durante a segunda metade do século XX, período em que a antiga União Soviética (URSS) e os Estados Unidos disputavam pela supremacia espacial. Entre 1957 e 1975, a rivalidade entre as duas superpotências durante a Guerra Fria focou-se em atingir pioneirismos na exploração do espaço, os quais eram vistos como necessários para a segurança nacional, e símbolos da superioridade tecnológica e ideológica de cada país. A corrida espacial envolveu esforços no lançamento de satélites artificiais, vôos humanos sub-orbitais em torno da Terra e viagens tripuladas à Lua. Desde então, observa-se um grande interesse pelo conhecimento e exploração da Lua, como exemplo, cita-se importantes missões lunares já realizadas pelo homem: Apollo 8 (NASA - 1968), Apollo 11 (NASA - 1969), Programa Luna (União Soviética - 1959-1976), Smart-1 (ESA - 2003), Orbitador de Reconhecimento Lunar (NASA - 2009), entre muitas outras.

Assim, se faz necessário o conhecimento da magnitude das variações dos elementos orbitais de satélites lunares, causadas por forças perturbativas derivadas de um potencial, com a finalidade de determinar, de forma mais exata, o real movimento realizado por estes satélites. Esta análise é extremamente importante e essencial para a realização de acertos e correções em órbitas de veículos espaciais, a fim de se obter maior êxito em missões espaciais lunares, e por conseguinte conhecer e explorar, de maneira mais concreta e acessível, o satélite natural da Terra.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Considerando-se, em um sistema inercial, dois pontos materiais, P_1 e P_2, de massas, respectivamente, m_1 e m_2, que se atraem de acordo com a Lei de Gravitação Universal, temos:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{P_1 - P_2}{r} \qquad (2.1.1)$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{P_2 - P_1}{r} \qquad (2.1.2)$$

A partir dessas equações podemos deduzir a equação vetorial que descreve o movimento de P_2 em relação a P_1 dada por:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (2.1.3)$$

Em que:

$$\mu = G(m_1 + m_2) \qquad (2.1.4)$$

2.1.1 SOLUÇÃO DO PROBLEMA

- Como o sistema não é influenciado por forças externas, seu centro de massa possui aceleração nula.

- Como a força gravitacional é uma força central, o momento angular é constante.

- Como a força gravitacional é conservativa, a energia do sistema é constante.

Utilizando a conservação do momento angular e a integral da energia, deduz-se que a solução a solução deste problema é uma trajetória cônica, que, para o caso elíptico, em coordenadas polares, utilizando,

$$p = \frac{C^2}{\mu} = a\left(1 - e^2\right) \tag{2.1.5}$$

e

$$e = \sqrt{\frac{2EC^2}{\mu^2} + 1} \tag{2.1.6}$$

Temos:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\left(\phi - \omega\right)} \tag{2.1.7}$$

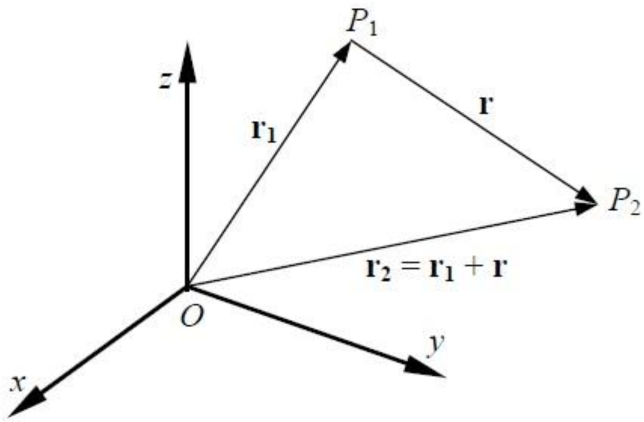

Figura 2.1 - Sistema de coordenadas no problema de dois corpos (Kuga *et al.*, 2008).

2.2 ELEMENTOS ORBITAIS

Pela mecânica celeste, a posição de um corpo celeste, natural ou artificial, é dada pelos seis elementos orbitais keplerianos, enunciados abaixo:

- a : semi-eixo maior da órbita;
- e : excentricidade da órbita;
- i : inclinação da órbita em relação ao plano do Equador;
- ω : argumento de pericentro;
- Ω : ascensão reta do nodo ascendente, ou longitude do nodo ascendente;
- M : anomalia média;

Os elementos orbitais, para o caso elíptico, são mostrados na Figura 2.1 para melhor entendimento. O movimento de satélites artificiais ao redor de um corpo central é descrito por uma elipse e pode ser representado da seguinte maneira:

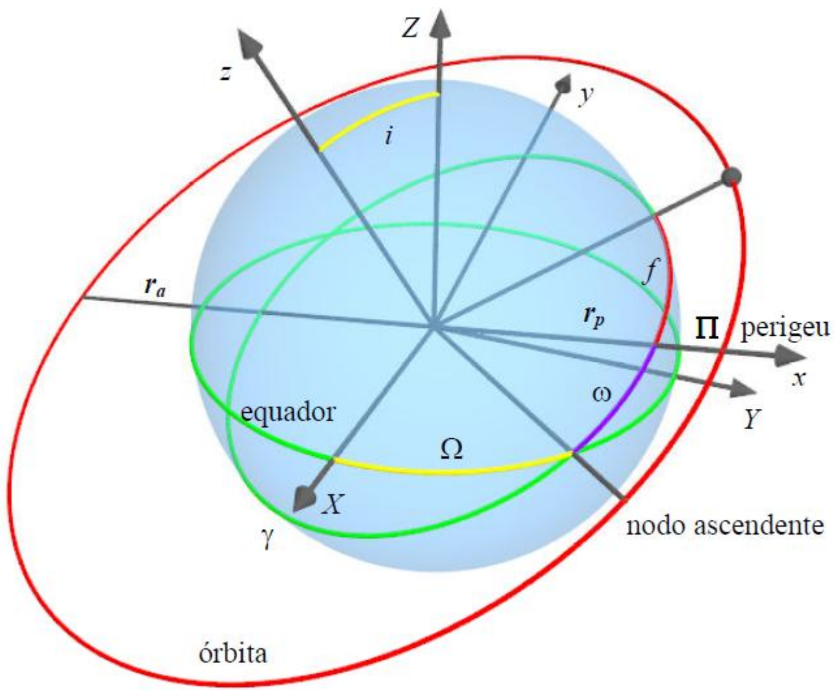

Figura 2.2 - Geometria para definição dos elementos orbitais (Kuga *et al.*, 2008).

2.3 POTENCIAL GRAVITACIONAL

Consideremos um satélite artificial, exclusivamente sob a atração gravitacional de um corpo central, orbitando um corpo com distribuição não uniforme de massa. O potencial gravitacional considerado, expresso em termos de coeficientes harmônicos esféricos, é dado por (Morando, 1974):

$$U = \frac{\mu}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n a_e^n}{r^n} P_n(sen\phi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} \frac{J_{n,m} a_e^n}{r^n} P_{n,m}(sen\phi)\cos m(\lambda - \lambda_{n,m})\right] \quad (2.3.1)$$

Em que n e m são, respectivamente, o grau e a ordem do polinômio associado de Legendre, μ é a constante gravitacional, a_e é o raio equatorial do corpo central considerado. $P_{n,m}$ são os polinômios associados de Legendre. r é o raio vetor (distância entre o satélite e o centro de massa do corpo com distribuição não uniforme de massa). O ângulo ϕ é a latitude do satélite, λ é a longitude; J_n, $J_{n,m}$ e $\lambda_{n,m}$ são características do corpo central. Tal potencial pode ser expresso em termos dos elementos orbitais do satélite (Morando, 1974). Os elementos orbitais métricos do satélite artificial (a, e, i) são introduzidos através de r. As variáveis angulares (ω, Ω, M) são introduzidas usando trigonometria esférica. f é a anomalia verdadeira (Carvalho *et al.*, 2010):

$$sen(\phi) = sen(i)sen(f + \omega) \qquad (2.3.2)$$

As figuras 2.3, 2.4 e 2.5 mostram a distribuição de massa em um corpo por meio da modelagem dos Polinômios e Polinômios Associados de Legendre.

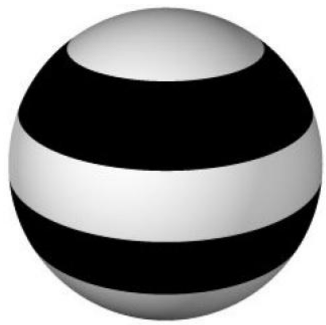

Figura 2.3 - Harmônicos zonais (Kuga *et al.*, 2000).

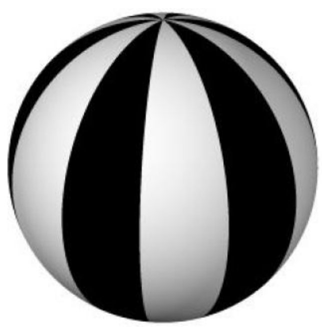

Figura 2.4 - Harmônicos setoriais (Kuga *et al.*, 2000).

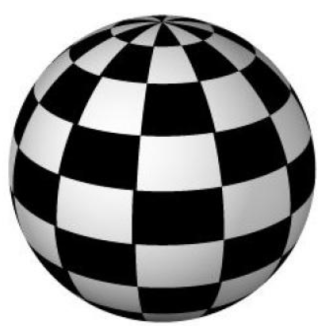

Figura 2.5 - Harmônicos tesserais (Kuga *et al.*, 2000).

2.4 EQUAÇÕES PLANETÁRIAS DE LAGRANGE

As equações planetárias de Lagrange (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813) são extremamente importantes no estudo dos corpos celestes, pois, através delas, é possível determinar a velocidade e a localização de um corpo em uma órbita. São dadas por (Morando, 1974):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M} \tag{2.4.1}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\left(1-e^2\right)^{\frac{1}{2}}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \omega} \tag{2.4.2}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2}\,seni}\frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\,seni}\frac{\partial R}{\partial \omega} \tag{2.4.3}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\,seni}\frac{\partial R}{\partial i} \tag{2.4.4}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\,seni}\frac{\partial R}{\partial i} \tag{2.4.5}$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} \tag{2.4.6}$$

Sendo R a função perturbadora, que em particular, para este projeto, é o potencial ($R=U$). As equações utilizadas para a análise da variação dos elementos angulares (ω, Ω, M), no presente trabalho, serão descritas a seguir.

Substituindo o potencial dado pela equação 2.3.1 em 2.4.4, 2.4.5 e 2.4.6 respectivamente, considerando apenas os termos seculares até a ordem de J_2, temos as seguintes expressões para as variações dos elementos angulares (Morando, 1974):

$$\omega = n_\omega t + \omega_0 =$$

$$\left(nJ_2\left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{1}{\left(1-e^2\right)^2}\left(-\frac{3}{5} + \frac{15}{4}\cos^2 i\right)\right)t + \omega_0 \tag{2.4.7}$$

$$\Omega = n_{\Omega} t + \Omega_0 =$$

$$\left(-nJ_2 \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{1}{\left(1-e^2\right)^2} \frac{3}{2} \cos i \right) t + \Omega_0 \qquad (2.4.8)$$

$$M = nt + n_M t + M_0 =$$

$$nt + \left(3nJ_2 \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 (-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 i) \left(1-e^2\right)^{-\frac{3}{2}} \right) t + M_0 \qquad (2.4.9)$$

Embora não haja perturbações seculares para elementos métricos (*a*, *e*, *i*), quando se considera no potencial gravitacional apenas harmônicos zonais pares, as perturbações periódicas em tais elementos provocadas pelos outros harmônicos, aqui não consideradas, são importantes para missões envolvendo satélites lunares baixos.

Considerando novamente apenas termos seculares e de longo período, contendo coeficientes fatorados por J_2 e J_4, na equação 2.3.1, a expressão para a perturbação é dada por (Carvalho *et al.*, 2012):

$$\begin{aligned}
U = &-\frac{1}{512} \frac{1}{a^2} (n^2 (72 J_4 a_e{}^4 - 720 \cos^2(i) J_4 a_e{}^4 \\
&+ 840 \cos^4(i) J_4 a_e{}^4 + 360 J_4 a_e{}^4 e^2 \\
&+ 128 J_2 a_e{}^2 a^2 + 192 J_2 a_e{}^2 a^2 e^2 \\
&+ 945 J_4 a_e{}^4 e^4 - 384 \cos^2(i) J_2 a_e{}^2 a^2 \\
&- 9450 \cos^2(i) J_4 a_e{}^4 e^4 - 3600 \cos^2(i) J_4 a_e{}^4 e^2 \\
&+ 11025 \cos^4(i) J_4 a_e{}^4 e^4 + 4200 \cos^4(i) J_4 a_e{}^4 e^2 \\
&- 576 \cos^2(i) J_2 a_e{}^2 a^2 e^2))
\end{aligned} \qquad (2.4.10)$$

Substituindo 2.4.10 em 2.4.4, 2.4.5 e 2.4.6 respectivamente, temos as seguintes expressões para as variações dos elementos angulares (ω, Ω, M):

$$
\begin{aligned}
\omega = n_\omega t + \omega_0 \; &= (\frac{1}{512}\frac{1}{a^4 e}(\sqrt{1-e^2}n \\
&(720 J_4 {a_e}^4 e + 384 J_2 {a_e}^2 a^2 e + 3780 J_4 {a_e}^4 e^3 \\
&-37800\cos^2(i) J_4 {a_e}^4 e^3 - 7200\cos^2(i) J_4 {a_e}^4 e \\
&+44100\cos^4(i) J_4 {a_e}^4 e^3 + 8400\cos^4(i) J_4 {a_e}^4 e \\
&-1152\cos^2(i) J_2 {a_e}^2 a^2 e)) \\
&+\frac{1}{512}\frac{1}{a^4\sqrt{1-e^2}\,sen(i)}(\cos(i)n \\
&(1440\cos(i) J_4 {a_e}^4 sen(i) \\
&-3360\cos(i)^3 J_4 {a_e}^4 sen(i) \\
&+768\cos(i) J_2 {a_e}^2 a^2 sen(i) \\
&+18900\cos(i) J_4 {a_e}^4 e^4 sen(i) \\
&+7200\cos(i) J_4 {a_e}^4 e^2 sen(i) \\
&-44100\cos^3(i) J_4 {a_e}^4 e^4 sen(i) \\
&-16800\cos^3(i) J_4 {a_e}^4 e^2 sen(i) \\
&+1152\cos(i) J_2 {a_e}^2 a^2 e^2 sen(i))))t + \omega_0
\end{aligned} \tag{2.4.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega = n_\Omega t + \Omega_0 \; &= (-\frac{1}{512}\frac{1}{a^4\sqrt{1-e^2}\,sen(i)} \\
&(n(1440\cos(i) J_4 {a_e}^4 sen(i) \\
&-3360\cos^3(i) J_4 {a_e}^4 sen(i) \\
&+768\cos(i) J_2 {a_e}^2 a^2 sen(i) \\
&+18900\cos(i) J_4 {a_e}^4 e^4 sen(i) \\
&+7200\cos(i) J_4 {a_e}^4 e^2 sen(i) \\
&-44100\cos^3(i) J_4 {a_e}^4 e^4 sen(i) \\
&-16800\cos^3(i) J_4 {a_e}^4 e^2 sen(i) \\
&+1152\cos(i) J_2 {a_e}^2 a^2 e^2 sen(i))))t + \Omega_0
\end{aligned} \tag{2.4.12}
$$

$$
\begin{aligned}
M &= nt + n_M t + M_0 = nt + (n - \frac{1}{na}(2(-\frac{1}{512}\frac{1}{a^2}(n^2(256 J_2 {a_e}^2 a \\
&+ 384 J_2 {a_e}^2 a e^2 - 768\cos^2(i) J_2 {a_e}^2 a - 1152\cos^2(i) J_2 {a_e}^2 a e^2)) \\
&+ \frac{1}{256}\frac{1}{a^3}(n^2(72 J_4 {a_e}^4 - 720\cos^2(i) J_4 {a_e}^4 + 840\cos^4(i) J_4 {a_e}^4 \\
&+ 360 J_4 {a_e}^4 e^2 + 128 J_2 {a_e}^2 a^2 + 192 J_2 {a_e}^2 a^2 e^2 + 945 J_4 {a_e}^4 e^4 \\
&- 384\cos^2(i) J_2 {a_e}^2 a^2 - 9450\cos^2(i) J_4 {a_e}^4 e^4 \\
&- 3600\cos^2(i) J_4 {a_e}^4 e^2 + 11025\cos^4(i) J_4 {a_e}^4 e^4 \\
&+ 4200\cos^4(i) J_4 {a_e}^4 e^2 - 576\cos^2(i) J_2 {a_e}^2 a^2 e^2)))) \\
&+ \frac{1}{512}\frac{1}{a^4 e}((1-e^2) n (720 J_4 {a_e}^4 e + 384 J_2 {a_e}^2 a^2 e \\
&+ 3780 J_4 {a_e}^4 e^3 - 37800\cos^2(i) J_4 {a_e}^4 e^3 \\
&- 7200\cos(i)^2 J_4 {a_e}^4 e + 44100\cos^4(i) J_4 {a_e}^4 e^3 \\
&+ 8400\cos^4(i) J_4 {a_e}^4 e - 1152\cos^2(i) J_2 {a_e}^2 a^2 e)))t + M_0
\end{aligned}
\tag{2.4.13}
$$

Uma expressão para o potencial com termos de curto e longo período, envolvendo harmônicos de maior grau e ordem, pode ser encontrada em Carvalho *et al.* (2012).

2.5 INCLINAÇÃO CRÍTICA

A inclinação crítica é calculada para analisar órbitas congeladas, ou seja, órbitas que mantêm ou tentam manter o pericentro (ω) e a excentricidade da órbita (e) constantes, de forma que, para uma determinada latitude, o satélite passa sempre com a mesma altitude, beneficiando alguns tipos de missões espaciais. As condições para uma órbita ser congelada são:

$$d\omega/dt = 0 \tag{2.5.1}$$

$$de/dt = 0 \tag{2.5.2}$$

$$di/dt = 0 \tag{2.5.3}$$

Considere o problema de um satélite artificial lunar com baixa altitude (h), levando em conta o achatamento (J_2) e o termo setorial C_{22} da Lua. Eliminando os termos de curto período, temos que o potencial perturbador de primeira ordem, somente contendo elementos de longo período, é dado por (Carvalho *et al.*, 2009):

$$U = \frac{1}{8} n^2 (6\varepsilon \cos^2(i) - 3\varepsilon e^2 - 2\varepsilon - 18\delta \cos(2\Omega) e^2 + 18\delta \cos(2\Omega) e^2 \cos^2(i) - 12\delta \cos(2\Omega) + 12\delta \cos(2\Omega) \cos^2(i) + 9\varepsilon \cos^2(i) e^2) \qquad (2.5.4)$$

Levando em conta 2.5.4, a equação para a inclinação crítica é encontrada. De fato, substituindo 2.5.4 em 2.4.4 e resolvendo $d\omega/dt = 0$, obtemos:

$$\cos^2(i) = \frac{-\varepsilon + 6\delta \cos(2\Omega)}{5(-\varepsilon + 2\delta \cos(2\Omega))} \qquad (2.5.5)$$

Em que: $\varepsilon = J_2 a_e^2$ e $\delta = C_{22} a_e^2$

2.6 ÓRBITAS HELIOSSÍNCRONAS

Uma órbita heliossíncrona é um caso particular de uma quase órbita polar (órbitas que possuem uma inclinação (i) igual ou próximas de 90° em relação ao plano do equador).

O satélite viaja do pólo norte ao pólo sul e vice-versa, mas o seu plano da órbita é sempre fixo para um observador postado no Sol. Assim, o satélite sempre passa, aproximadamente, sobre o mesmo ponto da superfície da Lua, todos os dias na mesma hora. Desta forma, ele pode transmitir todos os dados coletados para uma antena fixa lunar durante suas órbitas. Órbitas heliossíncronas são comumente utilizadas por satélites com finalidade de sensoriamento remoto.

Quando consideramos o efeito de J_2, a longitude do nodo ascendente (Ω), devido à não esfericidade lunar, é dada por (Park e Junkins, 1995):

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{J_2 a_e^{\,2} n \cos(i)}{a^2 (1-e^2)^2} \qquad (2.6.1)$$

A Lua gira à uma taxa angular de cerca de 360° por 27,32 dias, enquanto a Terra gira a uma velocidade angular de cerca de 360° por dia (Carvalho *et al.*, 2009).

O período orbital da Lua é aproximadamente 27,32 (tempo que a Lua leva para dar uma revolução completa em torno da Terra) e o período orbital da Terra (tempo que a Terra leva para dar uma revolução completa em torna do Sol) é aproximadamente 365,26 dias. Então, para um órbita heliossíncrona, temos, em dias lunares:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left(\frac{27{,}35}{365{,}26}\right) 360^{\circ} / \, dia \; lunar \qquad (2.6.2)$$

Ou seja,

$$\frac{d\Omega}{dt} = 26{,}92657^{\circ} / \, dia \; lunar \qquad (2.6.2)$$

Tomando 2.5.4 e substituindo em 2.4.5 para calcular a variação da longitude do nodo ascendente (Ω), obtemos:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{\varepsilon n}{a^2(1-e^2)^2}\cos(i) + \frac{3n\delta}{2a^2(\sqrt{1-e^2})}\cos(i)\left[\left(2+3e^2\right)\cos(2\Omega)\right] \qquad (2.6.3)$$

Usando 2.6.2 e 2.6.3, obtemos uma equação para calcular a inclinação de órbitas heliossíncronas para satélites lunares de baixa altitude (*h*):

$$i_s = \pi - \arccos\left[\frac{1.327307409.10^{-7}\, a^2 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{n(\varepsilon + \delta(-2-e^2+3e^4)\cos(2\Omega))}\right] \qquad (2.6.4)$$

Em que: $\varepsilon = J_2 a_e^2$ e $\delta = C_{22} a_e^2$

3 METODOLOGIA

3.1 VARIAÇÃO SECULAR DOS ELEMENTOS ANGULARES

O problema foi modelado dentro da dinâmica do "*Problema de Dois Corpos*", assumindo-se que o veículo espacial constitui um corpo de massa infinitesimal ($m_{sat} \rightarrow 0$) e seu movimento é perturbado exclusivamente sob a atração gravitacional de um corpo central (Lua ou Terra) presente no sistema. Como já dito anteriormente, os sistemas foram constituídos do seguinte modo: corpo central + satélite artificial - Lua + satélite artificial lunar e Terra + satélite artificial terrestre - em que as massas dos satélites foram consideradas desprezíveis.

Primeiro, considerou-se o potencial lunar (2.3.1), apenas com os termos seculares, contendo, somente, termos nas variáveis métricas (a, e, i) e de longo período (isto é, termos em que não aparece a anomalia média), até a ordem de J_2, o qual foi adicionado nas equações planetárias de Lagrange (2.4.4, 2.4.5, 2.4.6) para a obtenção da variação temporal dos elementos angulares (ω, Ω, M). Estes passos também foram feitos para a Terra, entretanto, com os valores correspondentes às suas condições. As variações dos elementos orbitais do caso lunar e terrestre foram comparadas. O segundo caso é análogo ao anterior, porém, ao invés de considerar o potencial lunar e terrestre até a ordem de J_2, levou em conta os coeficientes fatorados também por J_4.

Anularam-se os elementos angulares na expressão do potencial por intermédio de um método chamado de média, restando, assim, somente os elementos seculares.

As equações foram obtidas pelo *software* MAPLE e as simulações, gráficos e variações do movimento dos satélites pelo *software* MATLAB, para ambas as situações.

3.2 ÓRBITAS HELIOSSÍNCRONAS E INCLINAÇÃO CRÍTICA

Uma análise de órbitas heliossíncronas, considerando a distribuição não uniforme de massa da Lua, foi feita para a longitude do nodo ascendente (Ω). Considerou-se o problema de um satélite artificial perturbado pela distribuição não uniforme de massa lunar levando em conta o achatamento (J_2) e o termo setorial C_{22} (Carvalho *et al.*, 2009).

Realizou-se também uma análise para a inclinação crítica em primeira e segunda ordem do potencial perturbador, observando os termos de acoplamento da distribuição não uniforme de massa lunar (Carvalho *et al*., 2009)

3.3 CONSTANTES UTILIZADAS EM ROTINAS NUMÉRICAS PARA OBTENÇÃO DE RESULTADOS

Foram empregados os seguintes valores nas rotinas implementadas em MAPLE e MATLAB:

- Lua:

  Raio = 1737,4 km

  Massa = $7{,}36.10^{22}$ kg

- Terra:

  Raio = 6,371 km

  Massa = $5{,}972.10^{24}$ kg

Constante Gravitacional Universal (G): $6{,}6742.10^{-20}$ km^3/kg s^2

4 RESULTADOS

A seguir, serão mostrados alguns resultados obtidos ao longo de todo este trabalho.

4.1 ORDEM DE GRANDEZA PARA ALGUNS HARMÔNICOS

Na Tabela 4.1 são fornecidos alguns valores dos coeficientes harmônicos para a Terra e para Lua. Nota-se uma maior hierarquia na ordem de grandeza nos harmônicos da Terra do que nos harmônicos da Lua.

	Terra	***Lua***
C_{20}=-J_2	$1{,}082516.10^{-3}$	$2{,}032337.10^{-4}$
C_{22}	$1{,}57443228.10^{-6}$	$2{,}2357.10^{-5}$
C_{30}=-J_3	$-2{,}532656026.10^{-6}$	$8{,}47590.10^{-6}$
C_{40}=-J_4	$-1{,}655470.10^{-6}$	$-9{,}5919310.10^{-6}$
C_{50}=-J_5	$-2{,}272959251.10^{-7}$	$7{,}15409.10^{-7}$
C_{60}=-J_6	$5{,}406524138.10^{-7}$	$-2{,}17747.10^{-5}$
C_{70}=-J_7	$-3{,}523597646.10^{-7}$	$-1{,}35777.10^{-5}$
C_{80}=-J_8	$-2{,}047991918.10^{-7}$	$-9{,}67487.10^{-6}$
C_{90}=-J_9	$-1{,}206168362.10^{-7}$	$1{,}54960.10^{-5}$

Tabela 4.1 - Exemplos de valores dos coeficientes harmônicos até J_9 (Lemoine *et al.*, 1998 e Chen *et al.*, 2005).

4.2 VARIAÇÃO SECULAR DOS ELEMENTOS ANGULARES

As Tabelas 4.2, 4.3, 4.4 mostram a variação de ω, Ω e M, respectivamente n_ω, n_Ω e n_M, em graus por segundo, para alguns valores de h, e e i, em que h é a altitude do satélite artificial, dado pela diferença do semi-eixo maior da órbita (a) e o raio equatorial do corpo central em questão (a_e)**,** considerando os termos seculares até a ordem de J_2:

	h=a-a			

	$\boldsymbol{h=a-a_e}$	$\boldsymbol{n_\omega}$	$\boldsymbol{n_\Omega}$	$\boldsymbol{n_M}$
LUA	50 km	0.0000226 °/s	-0.0000132 °/s	0.0000096 °/s
	100 km	0.0000205 °/s	-0.0000120 °/s	0.0000087 °/s
	200 km	0.0000170 °/s	-0.0000100 °/s	0.0000072 °/s
TERRA	300 km	0.0001448 °/s	-0.0000850 °/s	0.0000614 °/s
	350 km	0.0001411 °/s	-0.0000828 °/s	0.0000598 °/s
	400 km	0.0001375 °/s	-0.0000807 °/s	0.0000583 °/s

Tabela 4.2 - Valores de n_ω, n_Ω e n_M para e = 0.01e i = 30°, considerando J_2.

	$\boldsymbol{h=a-a_e}$	$\boldsymbol{n_\omega}$	$\boldsymbol{n_\Omega}$	$\boldsymbol{n_M}$
LUA	50 km	0.0000034 °/s	-0.0000076 °/s	- 0.0000019 °/s
	100 km	0.0000031 °/s	-0.0000069 °/s	- 0.0000017 °/s
	200 km	0.0000026 °/s	-0.0000058 °/s	- 0.0000014 °/s
TERRA	300 km	0.0000221 °/s	-0.0000491 °/s	-0.0000123 °/s
	350 km	0.0000215 °/s	-0.0000478 °/s	-0.0000120 °/s
	400 km	0.0000210 °/s	-0.0000466 °/s	-0.0000117 °/s

Tabela 4.3 - Valores de n_ω, n_Ω e n_M para e = 0.01e i = 60°, considerando J_2.

	$h=a-a_e$	n_ω	n_Ω	n_M
LUA	50 km	-0.0000050 °/s	0.0000027 °/s	- 0.0000070 °/s
	100 km	-0.0000045 °/s	0.0000024 °/s	- 0.0000063 °/s
	200 km	-0.0000037 °/s	0.0000020 °/s	- 0.0000052 °/s
TERRA	300 km	-0.0000319 °/s	0.0000170 °/s	-0.0000446 °/s
	350 km	-0.0000311 °/s	0.0000166 °/s	-0.0000435 °/s
	400 km	-0.0000303 °/s	0.0000162 °/s	-0.0000424 °/s

Tabela 4.4 - Valores de n_ω, n_Ω e n_M para $e = 0.01$e $i = 100^\circ$, considerando J_2.

As Tabelas 4.4, 4.5 e 4.6 mostram a variação de ω, Ω e M (n_ω, n_Ω e n_M), em graus por segundo, para alguns valores de h, e e i, considerando os termos seculares da ordem de J_2 e J_4:

	$h=a-a_e$	n_ω	n_Ω	n_M
LUA	50 km	-0.0000026 ∘/s	- 0.0000141 ∘/s	-0.0000097 ∘/s
	100 km	-0.0000023 ∘/s	- 0.0000127 ∘/s	-0.0000088 ∘/s
	200 km	-0.0000019 ∘/s	-0.0000105 ∘/s	-0.0000073 ∘/s
TERRA	300 km	-0.0000124 ∘/s	-0.0000852 ∘/s	-0.000614 ∘/s
	350 km	-0.0000121 ∘/s	-0.0000830 ∘/s	-0.0000599 ∘/s
	400 km	-0.0000118 ∘/s	-0.0000809 ∘/s	-0.0000583 ∘/s

Tabela 4.5 - Valores de n_ω, n_Ω e n_M para $e = 0.01$e $i = 30^\circ$, considerando J_2 e J_4.

	$h=a-a_e$	n_ω	n_Ω	n_M
LUA	50 km	-0.0000061 °/s	- 0.0000074 °/s	0.0000032 °/s
	100 km	-0.0000055 °/s	- 0.0000067 °/s	0.0000028 °/s
	200 km	-0.0000046 °/s	-0.0000056 °/s	0.0000022 °/s
TERRA	300 km	-0.0000369 °/s	-0.0000490 °/s	0.0000135 °/s
	350 km	-0.0000359 °/s	-0.0000478 °/s	0.0000131 °/s
	400 km	-0.0000350 °/s	-0.0000466 °/s	0.0000127 °/s

Tabela 4.6 - Valores de n_ω, n_Ω e n_M para e = 0.01e i = 60°, considerando J_2 e J_4.

	$h=a-a_e$	n_ω	n_Ω	n_M
LUA	50 km	- 0.0000069 °/s	0.0000024 °/s	0.0000058 °/s
	100 km	- 0.0000063 °/s	0.0000022 °/s	0.0000053 °/s
	200 km	- 0.0000053 °/s	0.0000019 °/s	0.0000046 °/s
TERRA	300 km	-0.0000475 °/s	-0.0000170 °/s	0.0000435 °/s
	350 km	-0.0000463 °/s	0.0000166°/s	0.0000424 °/s
	400 km	-0.0000451 °/s	0.0000161 °/s	0.0000414 °/s

Tabela 4.7 - Valores de n_ω, n_Ω e n_M para e = 0.01e i = 100°, considerando J_2 e J_4.

4.3 INCLINAÇÃO CRÍTICA

Assim, vemos que para um satélite lunar em uma órbita congelada a inclinação crítica seria 63,43°, se considerassemos apenas a influência do J_2. Entretanto, considerando-se a influência do harmônico C_{22}, vemos pela equação 2.5.5, que a inclinação depende de **Ω**. Na Figura 4.1 observa-se, neste caso, que a inclinação crítica pode variar entre 58,77° e 72,62°. Para satélites artificiais terrestres a variação é muito pequena quando se considera o C_{22}.

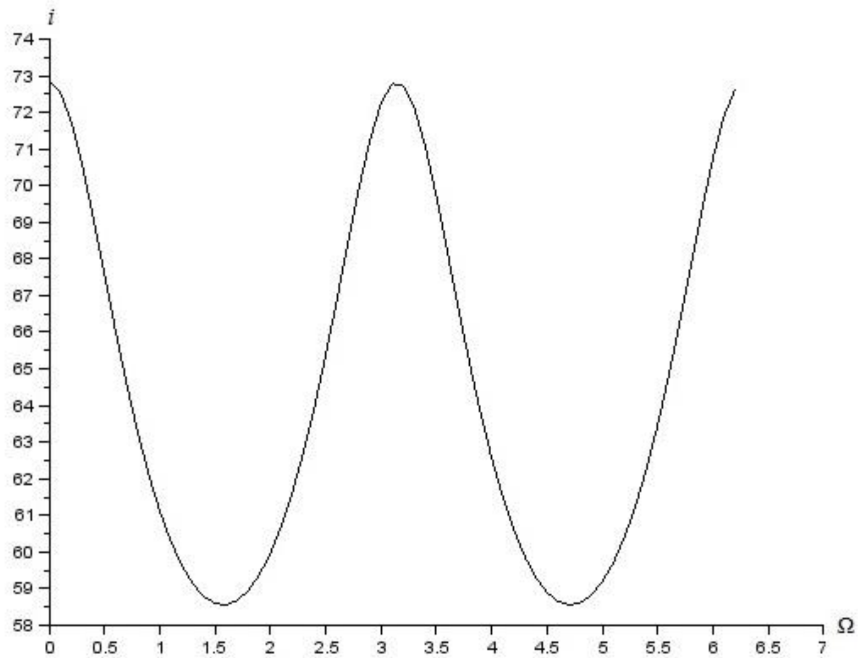

Figura 4.1 - Variação da inclinação crítica em relação à longitude do nodo ascendente em que *i* está em graus e *Ω* está em radianos.

4.4 ÓRBITAS HELIOSSÍNCRONAS

Para satélites lunares as órbitas heliossíncronas também são marcadamente influenciadas pelo harmônico C_{22}. A Figura 4.2 ilustra a variação da inclinação de órbitas heliossíncronas para dois satélites lunares baixos (a = 1838 km), um em órbita circular e outro com excentricidade de 0,038. A influência de C_{22} na variação da inclinação também não é considerável para órbitas heliossíncronas de satélites terrestres, devido à sua ordem.

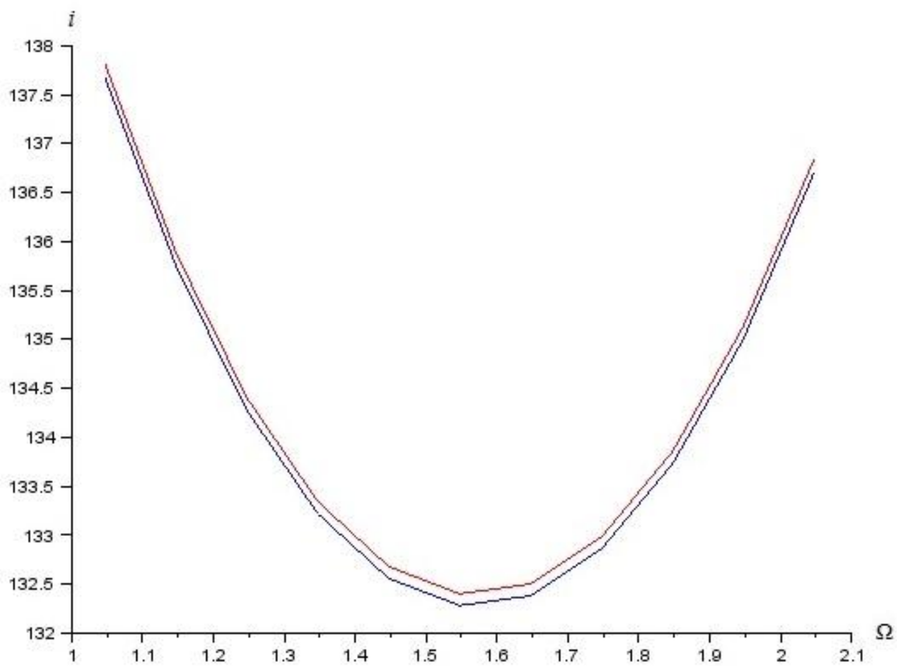

Figura 4.2 - Variação da inclinação de duas órbitas heliossíncronas em relação à longitude do nodo ascendente em que as curvas vermelha e azul possuem excentricidade $e = 0$, $e = 0.038$ respectivamente, $a = 1838$ km, i está em graus e Ω está em radianos.

5 CONCLUSÕES

Verificamos que a influência de considerarmos mais harmônicos no cálculo da variação dos elementos keplerianos angulares é maior para o caso de satélites lunares do que para satélites artificiais terrestres, mesmo para satélites altos.

No caso da inclinação crítica e de órbitas heliossíncronas, a influência do harmônico C_{22} é marcante e deve forçosamente ser levado em consideração, em missões com tais condições e nas quais seja preciso efetuar manobras de correção orbital com economia de combustível, aumentando assim, o tempo de vida útil do veículo.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARVALHO, J. P. S., VILHENA DE MORAES, R., PRADO, A. F. B. A. Planetary Satellite Orbiters: Applications for the Moon. Mathematical Problems in Engineering, doi: 10.1155/2011/187478, 2011.

CARVALHO, J. P. S., VILHENA DE MORAES, R., PRADO, A. F. B. A. Some orbital characteristics of lunar artificial satellites. Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy, vol. 108, n° 4, pp. 371-388, 2010.

CARVALHO, J. P. S., VILHENA DE MORAES, R., PRADO, A. F. B. A. Nonsphericity of the Moon and Near Sun-Synchronous Polar Lunar Orbits. Mathematical Problems in Engineering, doi: 10.1155/2009/740460, 2009.

CHEN, J. Y., NING, J. S., ZHANG, C. Y., LOU, J. On the determination of lunar gravity field in the Chinese first lunar prospector mission. Chinese Journal of Geophysics, vol. 48, n° 2, pp. 275-281, 2005.

KUGA, H. K., RAO, K. R., CARRARA, V. Introdução à Mecânica Orbital, 2ª Edição, INPE, S. J. Campos - SP, 2008.

KUGA, H. K., RAO, K. R., CARRARA, V. Satélites Artificiais, Movimento Orbital, 1ª Edição, INPE, S. J. Campos - SP, 2000.

LEIMOINE, F., KENYON, S., FACTOR, J., TRIMMER, R., PAVLIS, N., CHINN, D., COX, C., KLOSKO, S., LUTHCKE, S., TORRENCE, M., WANG, Y., WILLIAMSON, E., RAPP, R., OLSON, T. The development of the joint NASA – GSFC and the NIMA Geopotential Model EGM 96. NASA/TP –206861. 1998.

MORANDO, M. B. Mouvement d’un satellite artificiel de la Terre. Gordon & Breach, Paris, 1974.